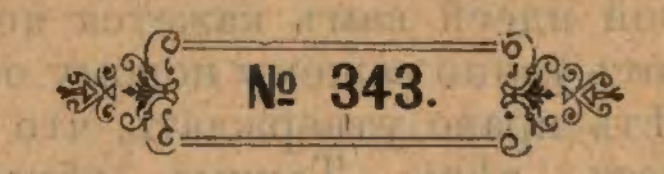
XXIX Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

15 Апрѣля  № 343. 1903 г.

Роль интуиціи и логики въ математикѣ.

Рѣчь, произнесенная профессоромъ Henri Poincaré *въ Парижѣ на второмъ международномъ конгрессѣ математиковъ, 11-го августа 1900 г.*

(*Окончаніе* *).

IV.

Философы приводятъ еще одинъ доводъ противъ исключительнаго господства логики въ математикѣ: „То, что вы выигрываете въ смыслѣ строгости“, говорятъ они: „то пропадаетъ для васъ по отношенію къ объективности. Вы только тогда достигнете своего логическаго идеала, когда порвете всѣ связи съ дѣйствительностью. Ваша наука непреложна, но лишь до тѣхъ поръ, пока она остается въ своемъ заколдованномъ кругу, пока она отказывается отъ какихъ бы то ни было отношеній къ внѣшнему міру. При малѣйшей попыткѣ примѣненія она выйдетъ изъ этого круга“.

Напримѣръ, мы желаемъ показать, что такое-то свойство присуще такому то объекту, понятіе о которомъ представляется

*) См. № 342 „Вѣстника“.

намъ не подлежащимъ опредѣленію, такъ какъ оно интуитивно. Это доказательство намъ сперва не удается, и мы принуждены удовлетвориться приблизительнымъ. Наконецъ, мы рѣшаемся дать нашему объекту точное опредѣленіе, и тогда мы въ состояніи вывести это свойство вполнѣ строго.

„А послѣ этого вы должны показать", говорятъ философы: „что объектъ, соотвѣтствующій вашему опредѣленію, и есть не что иное, какъ объектъ, который вамъ дала интуиція; или иначе, что тотъ реальный и конкретный объектъ, идентичность котораго съ вашей интуитивной идеей вамъ кажется непосредственно очевидной, соотвѣтствуетъ точно вашему новому опредѣленію. Только тогда вы будете имѣть право утверждать, что ему присуще свойство, о которомъ идетъ рѣчь. Такимъ образомъ, давъ точное опредѣленіе, вы не уничтожили трудности, а перенесли ее съ одного мѣста на другое".

Но это не точно; мы не перенесли трудности съ одного мѣста на другое, мы расчленили ее. Предложеніе, которое мы хотѣли доказать, состояло, на самомъ дѣлѣ, изъ двухъ различныхъ истинъ, которыхъ мы сперва не могли отличить другъ отъ друга. Первая—математическая истина; теперь она выведена вполнѣ строго. Вторая—экспериментальная истина; ибо только путемъ опыта мы можемъ узнать, соотвѣтствуетъ-ли или не соотвѣтствуетъ такой-то реальный и конкретный объектъ такому-то абстрактному опредѣленію. Эта вторая истина не доказана математически, но она не можетъ быть математически доказана, какъ не могутъ быть доказаны эмпирическіе законы физическихъ и естественныхъ наукъ. И было бы неразумно требовать бо́льшаго.

А развѣ не слѣдуетъ считать большимъ шагомъ впередъ то, что мы теперь различаемъ двѣ вещи, которыя долгое время смѣшивали другъ съ другомъ?

Тѣмъ не менѣе, я отнюдь не хочу сказать этимъ, что послѣднее возраженіе философовъ вполнѣ безосновательно. Стремясь достигнуть идеальной строгости, математическая наука принимаетъ искусственный характеръ, отталкивающій отъ нея большинство людей; она забываетъ при этомъ свои историческія начала. Математики показываютъ, какъ разрѣшаются тѣ либо другіе вопросы; но какъ они возникаютъ и почему—это остается неизвѣстнымъ.

Изъ этого очевидно, что одной логики недостаточно, что вся наука не можетъ состоять исключительно изъ логическихъ выводовъ: интуиція должна сохранить свою роль, служа дополненіемъ логикѣ, я бы сказалъ, ея противовѣсомъ или противоядіемъ.

Въ „*Enseignement mathématique*", основанномъ Laisant'омъ журналѣ, который завоевываетъ все бо́льшую извѣстность, я уже имѣлъ случай настаивать на важности той роли, которую должна играть интуиція при преподаваніи математическихъ наукъ. Безъ нея молодые умы не въ состояніи освоиться съ кругомъ идей математики; безъ нея они никогда не полюбятъ этой науки и бу-

дутъ видѣть въ ней лишь безполезное словопреніе; безъ интуиціи, наконецъ, они никогда не научатся примѣнять свои математическія знанія.

Но сегодня я говорю о роли интуиціи въ самой наукѣ, а не только въ преподаваніи ея. Если она столь полезна для студентовъ, то тѣмъ болѣе для ученыхъ, занятыхъ творческой работой.

V.

Мы ищемъ дѣйствительность; но что такое дѣйствительность?

Физіологи показываютъ, что организмы состоятъ изъ клѣтокъ; химики добавляютъ, что клѣтки, въ свою очередь, состоятъ изъ атомовъ. Вытекаетъ-ли изъ этого, что только эти атомы или клѣтки составляютъ дѣйствительность? Не слѣдуетъ ли, напротивъ, считать реальностью точно также и тѣ законы, по которымъ эти клѣтки приводятся въ движеніе, откуда и получается единство всего индивидуума; и не заслуживаетъ ли эта реальность бо́льшаго вниманія, чѣмъ реальность отдѣльнаго элемента? Развѣ можно достаточно изучить всѣ свойства слона, изслѣдуя только подъ микроскопомъ его мельчайшія части?

А именно нѣчто подобное замѣчается въ математикѣ. Логикъ разлагаетъ, такъ сказать, каждое доказательство на весьма большое число элементарныхъ операцій. Развѣ, чтобы понять дѣйствительный смыслъ этого доказательства, достаточно разобрать одну за другой эти операціи и убѣдиться въ вѣрности каждой изъ нихъ? Или, можетъ быть, достаточно, при помощи напряженія памяти, заучить наизусть весь ходъ доказательства; понялъ-ли тотъ доказательство, кто можетъ повторить его, приводя одну за другой всѣ его элементарныя операціи въ томъ самомъ порядкѣ, какъ это для доказательства необходимо?

Очевидно, что этого всего недостаточно, что мы еще не будемъ обладать при этомъ всей реальностью: нѣчто, что обусловливаетъ собой единство доказательства, отъ насъ ускользнетъ.

Недостаточно констатировать прочность каждой части этого сложнаго зданія, воздвигнутаго корифеями математической науки; недостаточно преклоняться предъ работой каменщика. Необходимо понять планъ архитектора.

А чтобы понять этотъ планъ, надо сразу видѣть всѣ части зданія. Интуиція же одна въ состояніи дать намъ средство однимъ взглядомъ охватить всю картину.

Чистый анализъ предоставляетъ въ наше распоряженіе множество пріемовъ, непреложность которыхъ несомнѣнна; онъ открываетъ намъ тысячи различныхъ путей, каждый изъ которыхъ мы съ полнымъ довѣріемъ можемъ выбрать, увѣренные, что на немъ намъ не встрѣтится препятствій. Но какой изъ этихъ путей ведетъ скорѣе всего къ цѣли? Кто укажетъ намъ, какой путь слѣдуетъ выбрать? Чтобы различить издали цѣль, необходимо

особое дарованіе, это дарованіе и есть интуиція. Она необходима для изслѣдователя, давая ему возможность избирать прямѣйшій путь; и не менѣе того необходима она для того, кто идетъ по слѣдамъ изслѣдователя и хочетъ знать, почему ему предлагаютъ тотъ, а не иной путь.

Когда вы наблюдаете игру въ шахматы, то, чтобы понять смыслъ партіи, вамъ недостаточно знать правила ходовъ всѣхъ фигуръ. Это дало бы вамъ возможность лишь убѣдиться въ томъ, что каждый ходъ игроковъ былъ произведенъ согласно правиламъ; но это еще не значитъ понять смыслъ игры. Между тѣмъ математикъ, остающійся всегда логикомъ, долженъ испытывать нѣчто подобное при чтеніи математическихъ книгъ. Чтобы дѣйствительно понять смыслъ партіи, необходимо понять, почему игрокъ сдѣлалъ именно такой-то ходъ, а не любой другой, также не противорѣчащій правиламъ; необходимо подмѣтить причинную связь въ этомъ рядѣ послѣдовательныхъ ходовъ—связь, вносящую въ игру элементъ разумнаго. А тѣмъ болѣе необходимо это для самаго игрока, т. е. для того, кто занятъ созидательной работой.

Но оставимъ это сравненіе и вернемся къ математикѣ.

Какъ эволюціонировала, напримѣръ, идея о непрерывной функціи? Сначала подъ функціей понимали зависимость между объектами, непосредственно данную нашими внѣшними чувствами; въ частности, примѣромъ такой функціи служила непрерывная черта, проведенная мѣломъ по черной доскѣ. Затѣмъ постепенно эта идея очищается, и вскорѣ ею пользуются для построенія сложной системы неравенствъ, которая заключаетъ въ себѣ, такъ сказать, всѣ линіи первоначальнаго грубаго образа. И когда это строеніе, наконецъ, воздвигнуто, удаляютъ лѣса, служившіе при его постройкѣ необходимой, но временной поддержкой и ставшіе теперь излишними; отбрасываютъ первоначальное грубое представленіе, и не остается ничего, кромѣ самого построенія, непреложнаго въ глазахъ логика. И теперь, когда первоначальный грубо-чувственный образъ совершенно исчезъ изъ идеи о непрерывной функціи, какъ можемъ мы понять построеніе логика? Почему, по какому капризу онъ воздвигалъ этотъ рядъ неравенствъ? почему именно этимъ, а не другимъ любымъ способомъ?

Можетъ быть, вы находите, что я злоупотребляю сравненіями; но я позволю себѣ привести еще одно. Вамъ всѣмъ, безъ сомнѣнія, хорошо извѣстенъ тотъ аггрегатъ тончайшихъ кремневыхъ иглъ, который образуетъ скелетъ обыкновенной губки. Когда органическія части тѣла губки удалены, остаются лишь нѣжныя и изящныя кружева. Этотъ скелетъ состоитъ, на самомъ дѣлѣ, исключительно изъ кремнія, но, что возбуждаетъ нашъ интересъ—это форма его; а чтобы понять, какъ она возникла, необходимо познакомиться съ жизнью губки, ибо эту форму придало кремнію живое существо. Точно такъ же интуитивныя представленія нашихъ отцовъ, несмотря на то, что мы

въ настоящее время совершенно оставили ихъ, придаютъ форму логическимъ построеніямъ, которыя замѣняютъ намъ интуицію.

Итакъ, тому, кто занятъ творческой работой, необходимо видѣть цѣлое; это необходимо также для всякаго, кто желаетъ дѣйствительно понять внутренній смыслъ этой работы. А можетъ-ли логика дать намъ это?

Нѣтъ; даже самое имя, которымъ окрестили логику математики, доказываетъ это. Въ математикѣ логика носитъ названіе *анализа*, что означаетъ *дѣленіе*, *расчлененіе*. Анализъ имѣетъ, такимъ образомъ, то же назначеніе, что скальпель и микроскопъ.

Итакъ, какъ логика, такъ и интуиція—обѣ играютъ важную роль, обѣ—незамѣнимы. Логика одна въ состояніи дать достовѣрность, и поэтому служитъ орудіемъ для доказательства; интуиція же—это орудіе творчества.

VI.

Но здѣсь возникаетъ сомнѣніе: предъ нами какъ будто противорѣчіе.

Въ началѣ этой рѣчи я различаю два рода математическихъ способностей—съ одной стороны, логическіе умы, или аналитики, съ другой, интуитивные, или геометры. А вѣдь и аналитики также не меньше творили, чѣмъ геометры; это очевидно изъ ряда приведенныхъ выше именъ.

Не противорѣчитъ-ли это моему разсужденію?

Прежде всего, не слѣдуетъ думать, будто логики всегда исходятъ отъ общаго, чтобы прійти къ частному, какъ того требуютъ правила формальной логики. Этимъ способомъ они отнюдь не могли бы расширить границы науки; научныя завоеванія могутъ быть достигнуты только путемъ обобщенія.

Въ своей работѣ, напечатанной въ „*Revue de Métaphysique et de Moral*“, изслѣдуя природу математическаго мышленія, я показалъ, какъ это мышленіе, не переставая быть абсолютно строгимъ, можетъ вести насъ отъ частнаго къ общему при посредствѣ особаго пріема, который я назвалъ *математической индукціей*.

Именно при помощи этого пріема аналитики подвигали и подвигаютъ науку впередъ; разсматривая ихъ доказательства, мы на каждомъ шагу наталкиваемся на него на ряду съ классическимъ силлогизмомъ Аристотеля.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что аналитики заняты не одними силлогизмами, подобно схоластикамъ.

Далѣе, ошибочно было бы предполагать, что они всегда подвигались шагъ за шагомъ, не видя цѣли, которой они желали достигнуть. Имъ нужно было отгадывать, гдѣ лежитъ прямой

путь къ этой цѣли; и необходимымъ средствомъ для этого является, прежде всего, аналогія.

Какъ поступитъ математикъ, если онъ пожелаетъ примѣнить извѣстный методъ къ рѣшенію той или другой задачи? Прежде всего, онъ долженъ будетъ найти аналогію интересующаго его вопроса съ другими задачами, рѣшенными уже этимъ способомъ; а затѣмъ, и разницу между ними, чтобы вывести, какъ приспособить этотъ методъ къ новому случаю.

Но какъ найти эту аналогію и эту разницу?

Иногда это почти очевидно, но я могъ бы привести проблемы, при которыхъ эту аналогію и эту разницу было бы не такъ легко найти. Часто для отысканія ихъ требуется далеко не всѣмъ людямъ присущее остроуміе.

Когда аналитикъ работаетъ творчески, онъ постоянно долженъ находить эти аналогіи. Для этого, не прибѣгая къ помощи чувствъ и воображенія, ему необходимо обладать непосредственнымъ чувствомъ того, что обусловливаетъ собой единство логическихъ разсужденій, что одухотворяетъ ихъ и придаетъ имъ внутреннее содержаніе.

Такъ напримѣръ, Hermite, разговаривая съ кѣмъ-нибудь, никогда не вызываетъ въ воображеніи образовъ, доступныхъ внѣшнимъ чувствамъ; а между тѣмъ, не трудно замѣтить, что для него самые абстрактные объекты мышленія живутъ. Онъ ихъ не видитъ, но чувствуетъ, что они не одно только искусственное сплетеніе логическихъ операцій, что имъ присуще какое-то внутреннее единство.

Можетъ быть, на это мнѣ возразятъ: да вѣдь это и есть интуиція. Вытекаетъ-ли изъ этого, что то различіе, о которомъ я говорилъ вначалѣ, только кажущееся? Слѣдуетъ-ли заключить, что существуетъ только одинъ родъ творческаго ума, т. е. что всѣ выдающіеся математики обладаютъ интуитивными способностями?

Нѣтъ, различіе, о которомъ я говорю, соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Я сказалъ уже, что существуютъ различные виды интуиціи. Я показалъ, насколько интуиція чистыхъ чиселъ, изъ которой можетъ исходить строгая математическая индукція, отличается отъ интуиціи чувственной, основанной, по существу, на воображеніи.

Но, можетъ быть, пропасть, отдѣляющая ихъ другъ отъ друга и не такъ глубока, какъ оно кажется на первый взглядъ? Развѣ эта чистая интуиція могла бы возникнуть безъ помощи внѣшнихъ чувствъ? Я предоставляю психологамъ и метафизикамъ разбираться въ этихъ вопросахъ.

Но, пока существуетъ сомнѣніе относительно нихъ, я имѣю полное право различать оба вида интуиціи. Ибо, во всякомъ случаѣ, каждому изъ этихъ видовъ присущъ особый объектъ, каждый

изъ нихъ основанъ, очевидно, на особенномъ душевномъ процессѣ. Ихъ можно было бы уподобить двумъ источникамъ свѣта, направленнымъ на различные предметы.

Аналитикамъ, какъ мы назвали ихъ, указываетъ и освѣщаетъ путь именно интуиція чистыхъ чиселъ, чистыхъ логическихъ формъ.

Она то даетъ имъ возможность не только давать доказательства, но и находить новые пути въ наукѣ. При ея помощи они въ состояніи однимъ взглядомъ обнять весь общій планъ логическаго построенія, и при томъ безъ посредства внѣшнихъ чувствъ.

Не прибѣгая къ воображенію, которое, какъ мы видѣли, не всегда заслуживаетъ полнаго довѣрія, аналитики могутъ подвигаться впередъ, не боясь ошибиться. Счастливы тѣ, которые въ состояніи обойтись безъ этой поддержки воображенія! Такіе умы достойны всеобщаго удивленія, но какъ они рѣдки!

Между аналитиками есть творческіе умы, но ихъ весьма мало.

Для большинства изъ насъ мышленіе при помощи чистой индукціи слишкомъ трудно. Мы чувствуемъ головокруженіе, если, опираясь только на одну логику, хотимъ бросить взглядъ вдаль; намъ необходима болѣе крѣпкая опора и поэтому, за весьма малымъ числомъ исключеній, математикамъ главнымъ орудіемъ творчества служитъ интуиція, основанная на чувствахъ и воображеніи. Послѣднія разсужденія вызываютъ новый вопросъ, который я, къ сожалѣнію, за недостаткомъ времени, долженъ оставить нерѣшеннымъ; я не успѣю даже формулировать его съ достаточной ясностью.

Я говорю о различіи, которое наблюдается между самими аналитиками: одни изъ нихъ занимаются исключительно дедукціями формальной логики, другіе пользуются, кромѣ того, этой чистой интуиціей.

Hermite, напримѣръ, не можетъ быть отнесенъ къ разряду геометровъ, какъ уже сказано, потому что онъ не пользуется чувственной интуиціей; но, тѣмъ не менѣе, онъ не логикъ въ собственномъ смыслѣ этого слова. Онъ отнюдь не симпатизируетъ чисто дедуктивнымъ пріемамъ, исходящимъ изъ общаго, чтобы прійти къ частному.

Этотъ новый вопросъ я могу только предоставить на ваше собственное размышленіе, такъ какъ уже поздно, а мой докладъ и безъ того затянулся.

О средствахъ, достаточныхъ для построенія геометрическихъ задачъ второй степени.

Д. Шора въ Геттингенѣ.

*(Окончаніе *).*

III.

Построенія задачъ второй степени безъ помощи циркуля.

29. Одною линейкой, какъ мы уже знаемъ, нѣтъ возможности выполнить построеніе всякой задачи второй степени; но это справедливо только до тѣхъ поръ, пока линейка служитъ инструментомъ только для проведенія прямой линіи черезъ построенныя двѣ точки. Точнѣе говоря, постулатовъ 1)-го и 3)-го (см. № 327, стран. 49) недостаточно для вывода всѣхъ задачъ второй степени.

Но такъ какъ на самомъ дѣлѣ при черченіи употребляютъ обыкновенно линейку, состоящую изъ прямолинейной полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми, или наугольникъ, стороны котораго пересѣкаются подъ опредѣленными углами, то возникаетъ вопросъ: нельзя ли примѣнять эти инструменты такъ, чтобы всякая задача второй степени могла быть построена при ихъ помощи безъ посредства циркуля? Этотъ вопросъ былъ поставленъ и разрѣшенъ въ положительномъ смыслѣ A. Adler'омъ [38]).

30. *Построенія при посредствѣ линейки, ограниченной двумя параллельными прямыми.* — Прежде всего, ясно, что постулатъ 3) остается безъ измѣненія, т. е.

3) если построены двѣ пересѣкающіяся прямыя, то мы можемъ построить точку ихъ пересѣченія.

Постулатъ же 1) получаетъ болѣе широкую формулировку:

1*) Если построены двѣ точки, то мы въ состояніи построить проходящую черезъ нихъ прямую, *равно какъ и каждую изъ параллельныхъ ей прямыхъ, отстоящихъ отъ нея на разстояніе* λ.

Ясно, что, если ширина нашей линейки $= \lambda$, то мы при помощи нея можемъ непосредственно выполнять построеніе этого постулата.

Построивъ затѣмъ къ двумъ любымъ пересѣкающимся прямымъ a и b на разстояніи λ къ нимъ параллельныя соотвѣтственно a' и b', получаемъ въ плоскости чертежа ромбъ. А слѣдо-

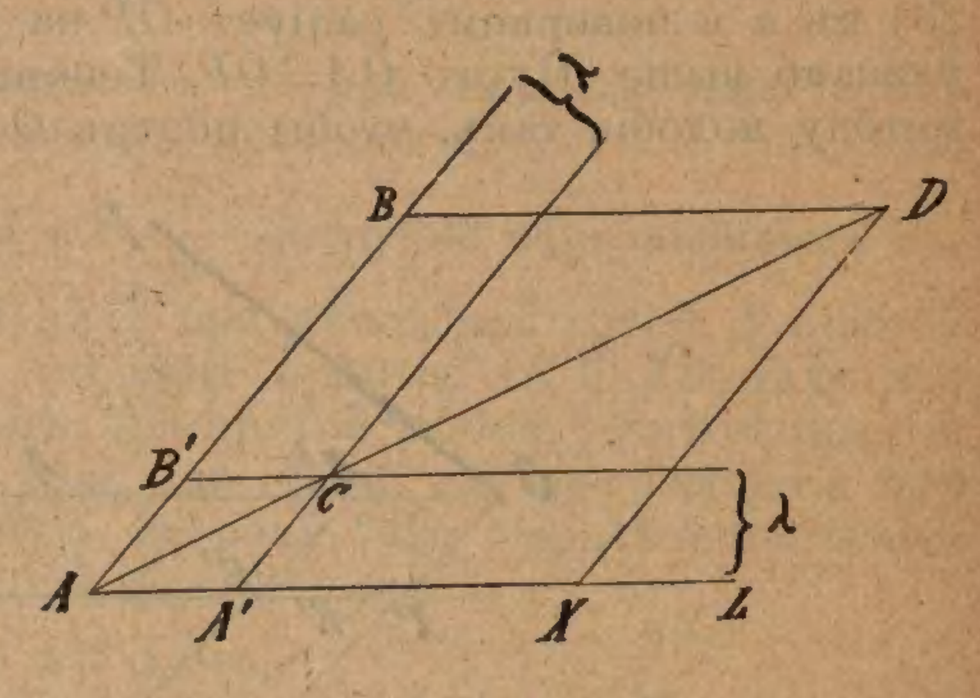
*) См. № 340 „Вѣстника".

[38]) Adler, *„Ueber die zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades notwendigen Hülfsmittel"*. Sitzungsberichte d. math.-nat. Cl. d. Wiener Akad. d. Wiss.; XCIX Bd., Abth. IIa, Jahrgang 1890, p. 846—859.

вательно, на основаніи изложеннаго въ параграфѣ **10**, мы получаемъ возможность строить къ любымъ прямымъ черезъ любыя точки параллельныя и производить параллельныя перенесенія отрѣзковъ. Но больше того, нашими средствами можно также вращать отрѣзки.

Дѣйствительно, пусть AB (см. фиг. 22) нѣкоторый отрѣзокъ, который требуется повернуть вокругъ A на уголъ BAL. Проведемъ прямыя $A'C$ и $B'C$, соотвѣтственно параллельныя AB и AL и отстоящія отъ нихъ на разстояніе λ. Затѣмъ, черезъ точку B строимъ прямую BD параллельно AL и соединивъ A съ C (гдѣ C—пересѣченіе $A'C$ съ $B'C$) прямой, продолжимъ ее до пересѣченія съ BD въ точкѣ D. Наконецъ, прямая, проведенная черезъ D параллельно BA, встрѣтитъ AL въ искомой точкѣ X, такъ что $AX = AB$.

А такъ какъ всякое перенесеніе отрѣзка можетъ быть составлено изъ параллельнаго перенесенія и вращенія, то этимъ доказано, что на основаніи постулатовъ 3) и 1*) можно переносить отрѣзки съ одной любой прямой на другую. Другими словами, изъ этихъ постулатовъ можетъ быть выведена всякая задача группы Hilbert'а [39]) (см. **27**, № 340, стран. 80—82).



Фиг. 22.

Но не всѣ задачи второй степени могутъ быть построены этими средствами, а только Hilbert'овы. Въ этомъ убѣждаетъ насъ слѣдующее чисто логическое соображеніе: посредствомъ линейки и переносителя отрѣзковъ можно строить постулаты 3) и 1*) (въ этомъ читатель безъ труда убѣдится самъ), а изъ послѣднихъ выводится перенесеніе отрѣзковъ. Слѣдовательно, всякая задача, построеніе которой вытекаетъ изъ 3) и 1*), принадлежитъ къ группѣ Hibert'а. О послѣдней же намъ уже извѣстно (см. **27**), что она содержитъ только часть задачъ второй степени.

Для того, чтобы посредствомъ линейки съ параллельными краями строить всякую задачу второй степени, необходимо поэтому придумать еще одинъ пріемъ ея примѣненія при черченіи. Такой новый пріемъ формулируется въ слѣдующемъ постулатѣ:

---

[39]) Нетрудно вывести изъ этого, что *всякая задача группы Hilbert'а можетъ быть построена одной только линейкой, если въ плоскости чертежа построенъ ромбъ.*

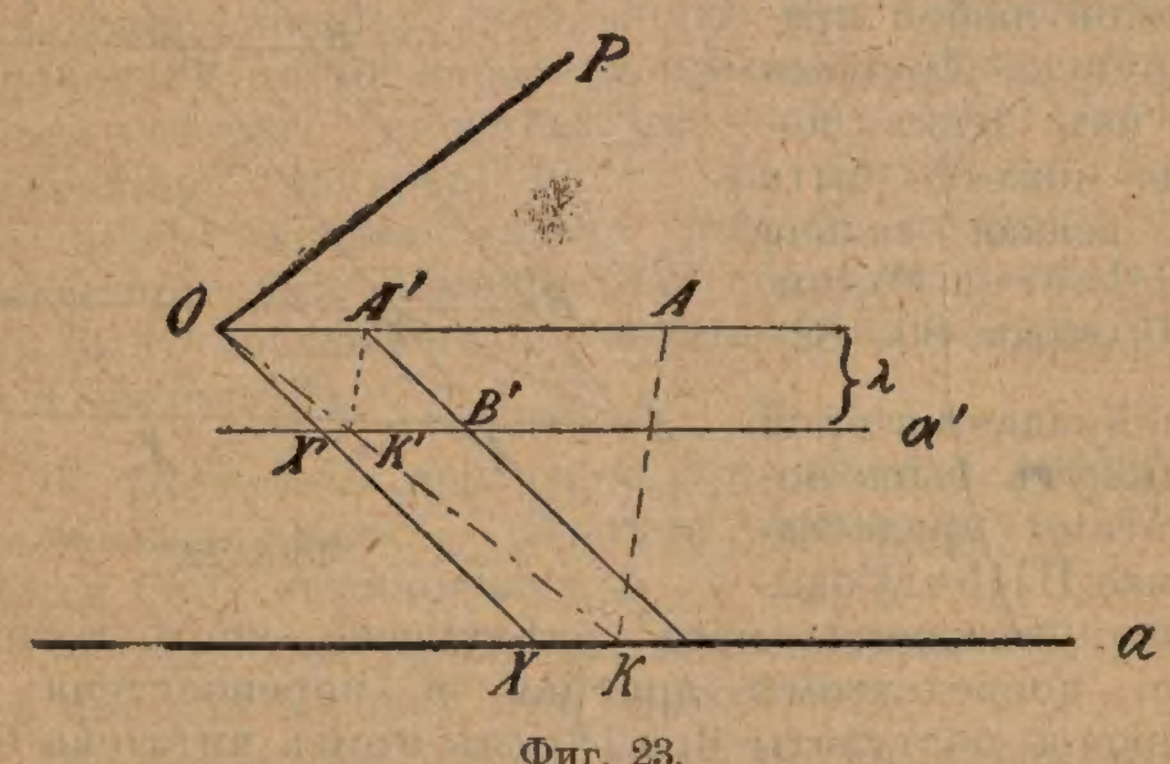
1**). — *Черезъ всякія двѣ точки A и B, разстояніе между которыми $\geqq \lambda$, мы можемъ построить пару параллельныхъ прямыхъ, разстояніе между которыми $= \lambda$, и при томъ такъ, что одна изъ этихъ прямыхъ проходитъ черезъ A, другая черезъ B.*

Мы утверждаемъ теперь, что *изъ постулатовъ 3), 1*) и 1**) можно вывести построеніе всякой задачи второй степени* (исключая, конечно, постулатъ 2).

Чтобы показать справедливость этого утвержденія, достаточно вывести изъ 3), 1*) и 1**) построеніе постулата 4); такъ какъ, на основаніи заключенія параграфа **25** (см. № 340, стран. 79), постулатъ 5) представляетъ собой слѣдствіе 3) и 4).

Итакъ, при помощи одной только линейки съ параллельными краями, требуется построить пересѣченіе нѣкоторой прямой a съ нѣкоторой окружностью, которая задана своимъ центромъ O и одной изъ точекъ периферіи—P.

Прежде всего, проведемъ черезъ O параллель OA (см. фиг. 23) къ a и повернемъ радіусъ OP на уголъ POA, какъ это было указано выше. Пусть $OA = OP$. Теперь преобразуемъ фигуру по методу подобія такъ, чтобы центръ O круга былъ центромъ пре-



Фиг. 23.

образованія (см. **20**, № 340, стран. 76), а прямая a преобразовалась бы въ прямую a', отстоящую отъ OA на разстояніе λ. Для этой цѣли строимъ, на основаніи 1*), прямую a', и, чтобы опредѣлить модуль преобразованія, т. е. отношеніе, въ которомъ фигуры сократятся (или расширятся), соединимъ любую точку K прямой a съ центромъ O, тогда, понятно, $OK' : OK$ есть модуль преобразованія, если K' точка пересѣченія OK съ a'. Поэтому, соединивъ K съ A и проведя изъ K' прямую параллельно KA, получаемъ въ точкѣ ея пересѣченія съ OA точку A', въ которую преобразовывается точка A. Теперь мы можемъ построить точку пересѣченія окружности радіуса OA' съ прямой a'. Въ самомъ дѣлѣ, помѣстивъ линейку такъ, чтобы одинъ изъ ея краевъ проходилъ черезъ O, другой черезъ A' (т. е. примѣняя постулатъ 1**), проводимъ черезъ эти точки пару параллелей. Послѣднія даютъ

въ пересѣченіи съ парой параллелей a' и OA' ромбъ $OX'B'A'$. X' служитъ при этомъ точкоіі пересѣченія прямой a' съ окружностью радіуса OA'. Чтобы получить, наконецъ, точку X пересѣченія прямой a съ окружностью радіуса OA, достаточно продолжить OX' до пересѣченія съ a въ искомой точкѣ X.

Справедливость этого построенія вытекаетъ изъ того, что при нашемъ преобразованіи X преобразуется въ X'.

Такимъ образомъ доказано, что всякая задача второй степени можетъ быть построена посредствомъ одной линейки, ограниченной параллельными краями, если пріемы примѣненія этой линейки таковы, какъ указано въ постулатахъ 1) и* 1**)

31. *Построенія при посредствѣ наугольника.*

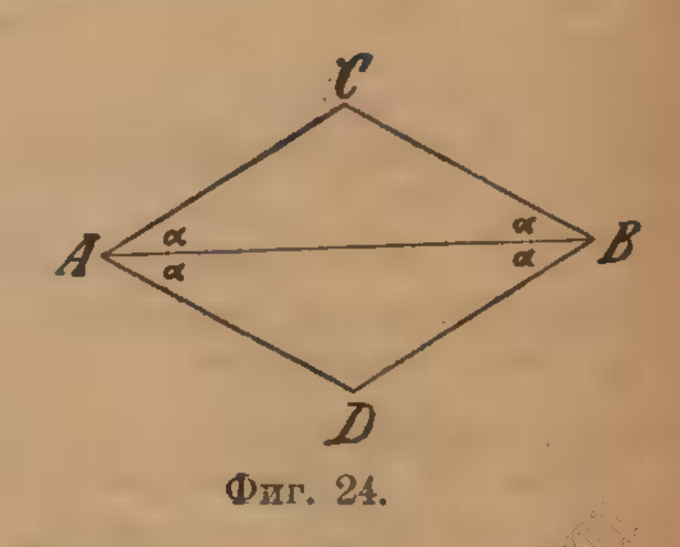
Постулатъ 3) остается безъ измѣненія; вмѣсто постулата 1), мы беремъ теперь:

1⁰) Если построены двѣ точки, то мы въ состояніи провести черезъ нихъ прямую, *равно какъ и прямую, образующую съ послѣдней въ любой ея точкѣ уголъ* α.

Если уголъ наугольника $= \alpha$, то при помощи него этотъ постулатъ можетъ быть, очевидно, построенъ.

Въ этомъ случаѣ, если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, нетрудно наугольникомъ построить ромбъ. Для этой цѣли при нѣкоторой точкѣ A прямой AB мы строимъ по обѣ ея стороны прямыя AC и AD, такъ что $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAB = \alpha$. Затѣмъ, при другой любой точкѣ B прямой AB строимъ такіе же два угла, но такъ, чтобы отверстія ихъ были направлены въ обратную сторону. Въ пересѣченіи получается тогда ромбъ $ACBD$ (см. фиг. 24).

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что этихъ средствъ недостаточно для построенія всѣхъ задачъ второй степени, и только Hilbert'овы задачи могутъ быть выполнены ими (срав. прим. [39]) на стран. 153).



Фиг. 24.

Чтобы имѣть возможность наугольникомъ строить любую задачу второй степени, Adler молчаливо принимаетъ еще одинъ постулатъ.

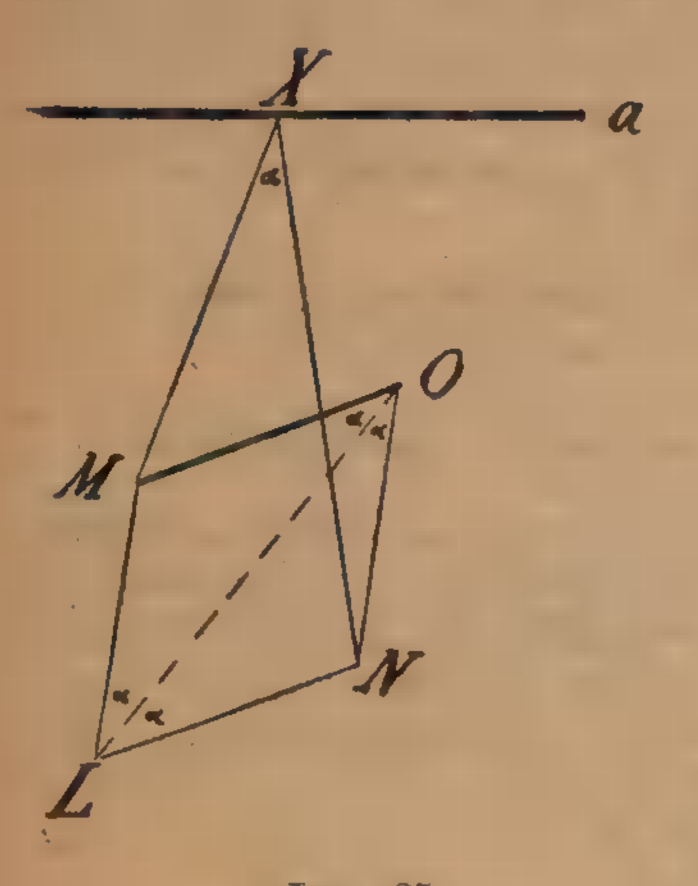
1⁰⁰. — *Если даны двѣ точки A и B и нѣкоторая прямая a внѣ ихъ, то мы можемъ построить уголъ α такъ, чтобы вершина его лежала на прямой a, а стороны проходили бы черезъ A и B.*

На основаніи постулатовъ 3), 1⁰) и 1⁰⁰), нетрудно построить постулатъ 4), а слѣдовательно, и всякую задачу второй степени, такъ какъ постулатъ 5) есть слѣдствіе 3) и 4).

Это построеніе постулата 4) можетъ быть выполнено слѣду-

ющимъ образомъ. Пусть a данная прямая (см. фиг. 25), OM радіусъ окружности, пересѣченіе которой съ a мы ищемъ. Построимъ на OM, какъ на сторонѣ, ромбъ $OMLN$, одинъ изъ угловъ котораго $= 2\alpha$. Помѣстивъ затѣмъ наугольникъ такъ, чтобы вершина его упала на прямую a, а стороны проходили бы черезъ M и N (т. е. примѣнивъ постулатъ 1^{00}), получаемъ на прямой a искомую точку X пересѣченія прямой съ окружностью.—Дѣйствительно, уголъ $MXN = \alpha = \frac{1}{2} MON$, а $MO = NO$.

Замѣтимъ, что, принимая постулатъ 1^{00}), Adler требуетъ построенія фигуры по *тремъ* элементамъ, тогда какъ во всѣхъ другихъ постулатахъ рѣчь идетъ исключительно о построеніи по *двумъ* элементамъ. Также и для практическаго черченія послѣдній результатъ не имѣетъ никакого значенія, ибо, чтобы строить постулатъ 1^{00}), во-первыхъ, необходимо было бы располагать весьма острымъ концомъ наугольника, что лишь съ трудомъ можетъ быть достигнуто; во-вторыхъ же, при построеніи фигуры по тремъ элементамъ неточность необходимо будетъ больше, чѣмъ при двухъ элементахъ.



Фиг. 25.

Итакъ, на нашъ взглядъ, построенія Adler'a при помощи наугольника не представляютъ особеннаго интереса.

32. *Построенія при помощи линейки и диска.*—Въ нашемъ распоряженіи находится, кромѣ линейки [40]), еще только круглый дискъ — скажемъ, монета.

Точнѣе говоря, кромѣ постулатовъ 1) и 3), мы принимаемъ еще:

1'). Если построены двѣ точки, то мы можемъ провести черезъ нихъ нѣкоторую окружность опредѣленныхъ размѣровъ. Центръ же этой окружности не данъ.

Кромѣ этого постулата, выражающаго собой примѣненіе диска, мы принимаемъ еще 4) и 5).

На основаніи постулатовъ 1), 1'), 3), 4) и 5), можетъ быть построена всякая задача второй степени.

Чтобы доказать это предложеніе, достаточно найти центръ одной изъ окружностей, начерченныхъ въ плоскости чертежа. Ибо тогда, по доказанному въ главѣ II-ой (см. **15**—**24**, № 340, стран. 73—79), мы посредствомъ линейки можемъ строить любую задачу второй степени.

---

[40]) Употребленіе линейки здѣсь предполагается такое, какъ въ первыхъ двухъ главахъ, т. е. мы пользуемся только однимъ краемъ ея.

Черезъ двѣ произвольныхъ точки A и B, разстояніе между которыми не слишкомъ велики, проведемъ, при помощи нашего диска, двѣ окружности, лежащія симметрично относительно прямой AB (см. фиг. 26). Если теперь черезъ точки A и B мы проведемъ сѣкущія, до пересѣченія съ окружностями въ точкахъ C, D, E и F, то хорды CD и EF будутъ параллельны между собой. Въ самомъ дѣлѣ (см. фиг. 26),

$$a+b=\pi, \quad c+d=\pi$$

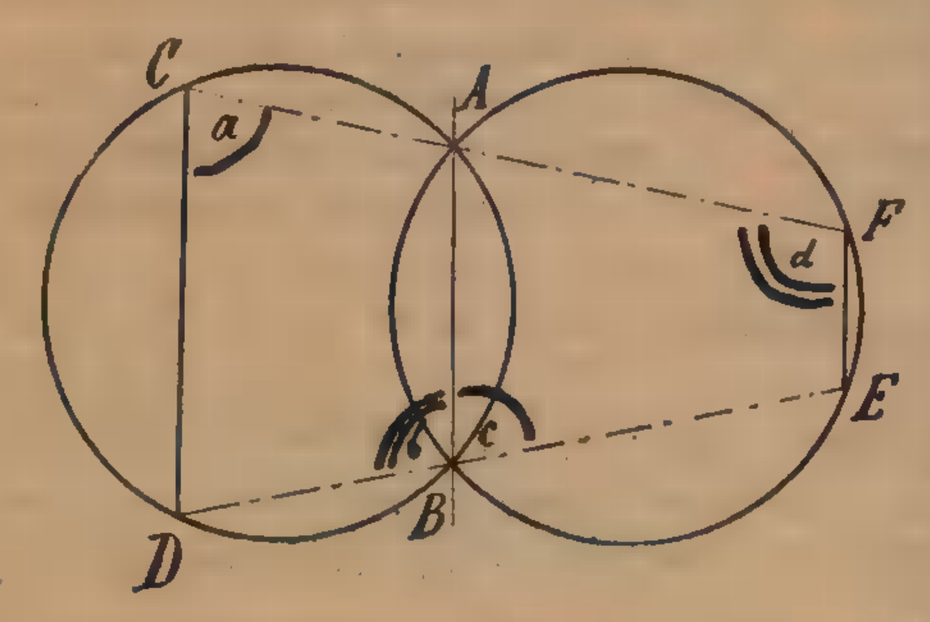
и

$$b+c=\pi,$$

поэтому

$$a+d=\pi.$$

На чертежѣ изображенъ тотъ случай, когда точка пересѣченія сѣкущихъ CF и DE лежитъ внѣ обоихъ круговъ; въ томъ случаѣ, когда эти прямыя пересѣкаются внутри одного изъ нихъ, доказательство столь же просто.



Фиг. 26.

Повторивъ названное построеніе два раза, получаемъ въ плоскости чертежа параллелограммъ. А слѣдовательно, по доказанному въ **10** (см. № 333, стран. 197), мы можемъ одной только линейкой дѣлить любыя отрѣзки пополамъ и проводить къ построеннымъ прямымъ параллельныя. Раздѣливъ двѣ любыхъ параллельныхъ хорды одного изъ нашихъ круговъ пополамъ, проводимъ теперь черезъ точки ихъ дѣленія прямую, которая есть не что иное, какъ діаметръ этого круга. Построивъ, наконецъ, середину этого діаметра, получаемъ центръ круга. Слѣдовательно, мы располагаемъ въ плоскости чертежа кругомъ, центръ котораго тоже извѣстенъ.

Итакъ, *при посредствѣ линейки и диска можетъ быть построена всякая задача второй степени.*

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Настоящая статья посвящена изслѣдованію вопроса о *достаточныхъ* для построенія задачъ второй степени средствахъ. Въ главѣ I (№№ 327, 328) показано, что одного циркуля для этого достаточно—фактъ, который былъ открытъ Mascheroni еще въ 1797 году. Глава вторая (см. №№ 333, 334) посвящена изложенію построеній Poncelet-Steiner'a; эти ученые показали, что всякая задача второй степени можетъ быть построена линейкой, если въ плоскости чертежа данъ кругъ и центръ его. Наконецъ,

въ третьей главѣ приведены, во-первыхъ, построенія Adler'а посредствомъ линейки съ двумя параллельными краями и посредствомъ наугольника; во-вторыхъ, въ послѣднемъ параграфѣ, **32**, этой главы я показалъ, что посредствомъ диска и линейки можно выполнить построеніе всякой задачи второй степени.

Этимъ, очевидно, наша проблема далеко не исчерпывается. Можно задаться, напримѣръ, вопросомъ, нельзя-ли ограничить употребленіе циркуля еще какъ-нибудь, и всетаки безъ помощи линейки строить имъ всякую задачу второй степени. Въ параграфѣ **26** (см. № 340, стран. 79—80) мы показали, что попытка, сдѣланная Adler'омъ въ этомъ направленіи, не увѣнчалась успѣхомъ; но изъ этого отнюдь не слѣдуетъ, что средства Mascheroni (т. е. обычное употребленіе одного только циркуля) нѣтъ возможности ограничить, не измѣняя объема группы доступныхъ построенію задачъ.

Не менѣе интереснымъ представляется намъ вопросъ о построеніяхъ при помощи дисковъ. При неограниченномъ пользованіи линейкой, для построенія задачъ второй степени достаточно располагать, какъ показано, однимъ дискомъ. Сколько дисковъ требуется, если такъ или иначе ограничить пользованіе линейкой?

Такіе или аналогичные вопросы не лишены, на нашъ взглядъ, извѣстнаго интереса.

Интереснѣе же и значительно важнѣе слѣдующая проблема: *Найти* **необходимыя** *условія, которымъ должна удовлетворять система постулатовъ, изъ которыхъ можетъ быть выведено построеніе всякой задачи второй степени?*

Радій и его лучи.

Рефератъ.

„Радій и его лучи“. *К. Гофмана*, переводъ съ нѣмецкаго, *Ф. Н. Индриксона* подъ редакціей проф. *И. И. Боргмана*. Спб. 1903.

Мы бы желали обратить вниманіе читателей на недавно вышедшую въ русскомъ переводѣ небольшую книгу проф. Мюнхенскаго университета К. Гофмана подъ названіемъ „Радій и его лучи“. Вопросы, которымъ посвящена эта брошюра, такъ важны и интересны, что мы позволимъ себѣ подробнѣе остановиться на ея содержаніи. Въ №№ 286 и 289 „Вѣстника“ была помѣщена подробная статья проф. Н. Д. Пильчикова, содержащая обзоръ того, что въ то время было извѣстно въ области радіоактивныхъ явленій. Въ настоящемъ рефератѣ, слѣдуя изложенію Гофмана, мы имѣемъ въ виду напомнить читателямъ хорошо извѣстные факты и обратить вниманіе на результаты послѣднихъ изслѣдованій.

Открытіе Рентгеномъ x-лучей вызвало громадный интересъ въ ученомъ мірѣ и послужило толчкомъ для важныхъ открытій. Такъ Беккерель нашелъ, что лучи x, равно какъ и ранѣе извѣстные катодные лучи, получавшіеся при прохожденіи электрическаго тока чрезъ сильно разрѣженные газы, могутъ существовать въ совершенно иныхъ условіяхъ: ихъ испускаютъ уранъ и нѣкоторые изъ его препаратовъ. Отожествить лучи обѣихъ категорій позволила наличность цѣлаго ряда общихъ свойствъ: для нихъ прозрачны дерево, эбонитъ и металлы и не существуютъ законы отраженія, преломленія, диффракціи и поляризаціи; въ ихъ присутствіи разсѣиваются электрическіе заряды, и воздухъ становится несравненно лучше проводящимъ; наконецъ, и тѣ и другіе вызываютъ энергичныя реакціи вещества: свѣтятся фосфоресцирующіе экраны и чернѣютъ фотографическія пластинки.

Подвергая урановыя руды переработкѣ, нашли возможность получить радіоактивныя вещества, несравненно болѣе активныя, чѣмъ уранъ, названныя актиніемъ, полоніемъ и радіемъ.

Подобно солнечному лучу, лучъ урана сложенъ и состоитъ изъ ряда лучей различныхъ преломляемостей; магнитное поле даетъ ихъ спектръ. Въ присутствіи магнита лишь часть лучей (лучи „α") сохраняютъ прямолинейное направленіе, и отъ этихъ лучей преимущественно зависитъ дѣйствіе урана на электроскопъ; другая часть ихъ, лучи „β", получаетъ криволинейную траекторію; они попреимуществу обусловливаютъ химическія дѣйствія урановыхъ лучей.

Замѣтимъ, что x-лучи также отличаются отъ катодныхъ прямолинейнымъ распространеніемъ въ магнитномъ полѣ. Активности урана не удалось повысить дѣйствіемъ катодныхъ или x лучей; но зато химическимъ путемъ, напримѣръ, прибавленіемъ къ растворуураніевой и баріевой соли сѣрной кислоты, можно было уничтожить ее на 18 мѣсяцевъ, послѣ чего она, однако, вернулась съ прежней силой.

Наиболѣе сильнымъ изъ радіоактивныхъ веществъ является радій, сравнительно хорошо изученный.

Въ различныхъ стадіяхъ процесса его полученія активность его не одна и та же, что связано всегда съ измѣненіями молекулярнаго вѣса; въ отдѣльныхъ экземплярахъ радія активность доходитъ до 100.000, если принять активность урана за 1. Лучи, испускаемые радіемъ, дѣлятся на: 1° лучи „α", отклоняемые магнитомъ, улучшающіе проводимость воздуха и, повидимому, состоящіе изъ положит. заряженныхъ частичекъ; 2° лучи „β", тоже отклоняемые магнитомъ, но въ противоположную сторону и, какъ несомнѣнно доказано, несущіе отрицательные заряды, и 3° лучи „γ", не отклоняемые магнитомъ, способные проникать чрезъ различныя тѣла. Вліяніе температуры на радіацію радія не обнаружено, хотя изслѣдователи пользовались даже такими низкими температурами, какія даетъ жидкій воздухъ.

Заключенный въ свѣтонепроницаемый конвертъ, радій дѣйствуетъ на глазъ, который какъ бы заполняется свѣтомъ.

Радій вызываетъ рядъ самыхъ разнообразныхъ химическихъ реакцій и мѣняетъ окраску нѣкоторыхъ тѣлъ. Нѣсколько милиграммовъ его могутъ уничтожить произрастаніе горчичнаго сѣмени, произвести воспалитльные процессы кожи. Такіе несходные процессы, какъ озонированіе кислорода и измѣненіе электрическаго сопротивленія селена, могутъ быть обязаны одной причинѣ — присутствію вблизи радія.

Книжка Гофмана содержитъ интересныя свѣдѣнія о радіоактивномъ свинцѣ, веществѣ, которое авторъ самъ изслѣдовалъ. Вещество это интересно въ томъ отношеніи, что его активность возрастаетъ подъ дѣйствіемъ катодныхъ лучей. Ограничиваясь этимъ замѣчаніемъ, перейдемъ къ сильно-радіоактивному веществу, актинію. Это вещество наблюдалъ Schmidt, но наиболѣе изучилъ его Debierne. Актиній, помимо прямолинейной радіаціи, посылаетъ въ окружающую среду частицы вещества, электрически индифферентныя, нерадіоактивныя („эманація"). Радій тоже обладаетъ способностью эманаціи, но въ меньшей мѣрѣ. Матеріальный характеръ эманаціи прочно установленъ: ее, напр., можетъ унести потокъ воздуха. Если вблизи актинія помѣстить платиновую проволоку, заряженную отрицательнымъ электричествомъ, она становится радіоактивной; активность не можетъ быть удалена ни нагрѣваніемъ, ни охлажденіемъ, и поддается лишь дѣйствію кислотъ сѣрной и соляной, послѣ чего, однако, послѣднія, въ свою очередь, становятся активными. Количество эманаціи пропорціонально вѣсу испускающаго ее тѣла и зависитъ отъ температуры и степени влажности окружающаго пространства. Эманація распространяется въ воздухѣ, диффундируя, подобно частичкамъ пахучихъ тѣлъ, и, садясь на тѣла, дѣлаетъ всѣхъ ихъ на время радіоактивными. Эманація входитъ въ кругъ явленій, извѣстныхъ подъ именемъ индуктированной радіоактивности.

Индуктированная активность—способность тѣлъ, находящихся вблизи радіоактивныхъ, становиться надолго, въ свою очередь, активными; она такое же атомное свойство тѣлъ, какъ и вызывающая ее первичная активность. Имѣя въ виду это свойство тѣлъ, предполагаютъ, что третье изъ сильныхъ радіоактивныхъ тѣлъ — полоній—есть лишь висмутъ съ индуктированной активностью.

Недавно удалось обнаружить въ атмосферѣ присутствіе радіоактивныхъ веществъ; тѣмъ самымъ данъ въ руки изслѣдователей болѣе легкій способъ добыванія ихъ. Обнаружено это было слѣдующимъ образомъ. Выставляя на открытый воздухъ, мощно заряженный отриц. электричествомъ металлическій шестъ, Geitel замѣтилъ въ немъ спустя нѣкоторое время нѣкоторыя изъ свойствъ актиническихъ тѣлъ; такъ же можно „актинировать" бумагу, шерсть, листья растеній.

Сама собой понятна важность этого открытія, напр., для атмосфернаго электричества.

При бѣдности нашихъ свѣдѣній о радіоактивныхъ веществахъ, можно лишь описывать наблюдаемыя явленія. Но есть указанія, до нѣкоторой степени проливающія свѣтъ на природу самаго явленія. По наблюденіямъ Curie, пустота, въ которой находится активное вещество, становится несовершенной, развивается какой-то газъ, происходитъ фосфоресценція стекла.

Heidweiller, уравновѣсивъ на химическихъ вѣсахъ трубку съ 5 гр. радіоактивнаго вещества, обнаружилъ чрезъ 2 недѣли потерю въ вѣсѣ, оцѣненную имъ въ 0·003 gr.; онъ настаиваетъ на томъ, что потеря въ вѣсѣ происходитъ непрерывно, достигая за сутки 0·02 mgr. Другой, не менѣе замѣчательный опытъ принадлежитъ Geigel'ю; къ одной чашкѣ вѣсовъ подвѣшивался свинцовый шаръ; если снизу помѣстить 1 gr. радіоактивнаго вещества, то шарикъ теряетъ въ вѣсѣ 0·035 mgr.

Изъ всего предыдущаго видно, какъ много сходнаго въ лучахъ катодныхъ и „Беккерелевыхъ"; это дало право перенести и на послѣдніе выкладки J. J. Thomson'a, оцѣнивающія зарядъ, массу и скорость несущихся частицъ.

Чтобы составить хотя бы приблизительное понятіе о величинѣ получаемой радіоактивными тѣлами энергіи, приведемъ вычисленіе Rutheford'a, основанное на чисто теоретическихъ соображеніяхъ: 1 gr. соли радія съ активностью 100.000 (принимая активность урана за 1) излучаетъ въ годъ 3000 калорій.

Особенностью книги проф. Гофмана служитъ подробное указаніе литературы предмета, что даетъ возможность легче оріентироваться въ ней лицамъ, интересующимся затронутыми въ ней вопросами.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Телефонированіе безъ проводовъ. Телеграфированіе и телефонированіе представляютъ собою лишь два различныхъ примѣненія однихъ и тѣхъ же физическихъ законовъ. Пользоваться-ли слабыми импульсами тока, посылаемыми чрезъ проволоку или кабель для воспроизведенія знаковъ (точекъ и черточекъ), или этими же импульсами приводить въ колебаніе металлическую пластинку телефона, то и другое, въ сущности, не что иное, какъ однородныя механическія дѣйствія: одно видимое для глаза, другое воспринимаемое слухомъ. Остроумная система Поллака и Вирага представляетъ собою даже сочетаніе обоихъ дѣйствій, дѣлая колебанія пластинки видимыми для глаза.

Естественно, что успѣхи телеграфіи должны были стать также успѣхами телефоніи. За телеграфированіемъ безъ проводовъ должно было послѣдовать телефонированіе безъ проводовъ, что и подтверждается исторіею этихъ изобрѣтеній. При этомъ нельзя не обратить вниманія на одно довольно характерное об-

ѣтоятельство. Опыты телеграфированія безъ проводовъ вращались преимущественно на пути электрической индукціи и передачи волнъ; съ такою же односторонностью при телефонированіи безъ проводовъ пользовались оптическимъ способомъ передачи. Между тѣмъ, очевидно, оба способа одинаково примѣнимы для той и другой цѣли, и безъ сомнѣнія, впослѣдствіи, смотря по назначенію, разстоянію и т. д., будутъ пользоваться и различными системами. Впрочемъ, тотъ родъ телефонированія безъ проводовъ, о которомъ будетъ сказано ниже, старше безпроволочной телеграфіи, хотя въ своей новѣйшей, довольно удачной формѣ, онъ получилъ практическое значеніе, лишь благодаря изобрѣтеніямъ, сдѣланнымъ въ недавнее время.

Если имѣть въ виду, какъ часто трудныя техническія задачи, между прочимъ, фотографированіе на отдаленіи, телеграфированіе изображеній, рукописей и т. п., предполагалось разрѣшать при помощи селена и сколько тщетныхъ надеждъ возлагалось на этотъ элементъ, то трудно побороть недовѣріе къ успѣхамъ, ожидаемымъ при помощи такого ненадежнаго и упрямаго вещества. Но, однако, новѣйшіе опыты на озерѣ Ванъ въ Германіи (близъ Берлина) дали непреложное доказательство возможности телефонированія посредствомъ селена, во крайней мѣрѣ, на небольшія разстоянія.

Селенъ, при обыкновенныхъ условіяхъ не проводящій электрическаго тока, получаетъ свое замѣчательное и цѣнное свойство, благодаря расплавленію и поддерживанію его во время застыванія нѣкоторое время при температурѣ 210 град. по Цельсію. Хотя и послѣ этого процесса, выдѣлываемый въ формѣ тонкихъ пластинокъ, онъ еще не становится хорошимъ проводникомъ, но представляетъ электрическому току тѣмъ меньше сопротивленія, чѣмъ ярче онъ освѣщенъ.

Опыты примѣненія волнообразныхъ движеній производили недавно два американскихъ инженера, пользуясь при этомъ опять-таки землею какъ посредствующимъ веществомъ. Система, выработанная Стуббефильдомъ, очень проста. Обыкновенно употребляемые при телефонированіи приборы, микрофонъ, слуховой аппаратъ, батарея, съ одной и съ другой стороны надлежащимъ образомъ включаются, оставаясь, однако, не соединенными между собою. Одинъ конецъ проводника, соединяющій микрофонъ съ батареей и, повидимому, также съ индукціонной катушкой, дающей искры, сообщенъ съ металлическимъ прутомъ или трубой, снабженной арматурой наподобіе колокола и зарытой довольно глубоко въ землю. Такая же труба, соотвѣтствующая пріемному шесту искроваго телеграфа, сообщена съ другой стороны со слуховымъ приборомъ (телефономъ). Равнымъ образомъ, и эти опыты, производившіеся при содѣйствіи военнаго вѣдомства, въ Уашингтонѣ и окрестностяхъ, а также по рѣкѣ Потомакъ, имѣли успѣхъ, если, вообще, можно говорить объ успѣхѣ при разстояніяхъ въ одинъ и два километра. Все устройство легко можетъ быть пере-

носимо и вѣситъ менѣе другихъ, что, сравнительно съ описанной выше оптической системой, представляетъ уже значительное преимущество. Все, необходимое для станціи, за исключеніемъ пріемнаго желѣзнаго шеста, заключается въ ящикѣ въ $^3/_4$ фута ширины, 1 футъ длины и $1^1/_2$ фута вышины, тогда какъ съ селеновымъ аппаратомъ уже для одного рефлектора требуется подвода и, кромѣ того, достаточный источникъ тока. Приготовленія отнимаютъ также больше времени, чѣмъ американская система, въ которой необходимо только воткнуть въ землю шесты, и сообщеніе тотчасъ можетъ быть установлено. Очень хорошо удавалось также сообщеніе между береговою станціею и пароходомъ, на бортѣ котораго была установлена другая станція. Въ послѣднемъ случаѣ достаточно для установленія сообщенія опустить въ воду полюсную плиту.

Кромѣ опытовъ, упомянутыхъ выше, въ Соединен. Штатахъ производились еще опыты телефонированія безъ проводовъ Коллинсомъ по другой системѣ, впрочемъ, мало отличающейся отъ системы Стуббефильда. Въ этомъ случаѣ успѣхъ получился также хорошій, хотя все еще на малыя разстоянія (приблизительно на 1,5 англійскихъ миль). Практическое примѣненіе безпроволочной телефоніи, которымъ прежде всего заинтересовалось военное вѣдомство, находится, главнымъ образомъ, въ зависимости отъ того, будетъ-ли она пригодна для болѣе далекихъ разстояній, но трудно сомнѣваться, чтобы этого не удалось достигнуть въ болѣе или менѣе близкомъ будущемъ.

Можно предполагать, что и электрическая безпроволочная телефонія тѣмъ временемъ сдѣлаетъ дальнѣйшіе успѣхи. Сообщеніе по телефону на десять или пятнадцать километровъ безъ подвѣски проволоки могло бы принести большую пользу въ военномъ дѣлѣ, несмотря на то, что въ безпроволочной искровой телеграфіи достигнуты нынѣ уже болѣе значительныя разстоянія. Непосредственное разговорное сообщеніе, несомнѣнно, имѣетъ преимущество передъ телеграфированіемъ. На сторонѣ какой изъ системъ телефонированія останется тогда перевѣсъ,—это является вопросомъ будущаго. Оптическо-электрическая система, повидимому, испытывалась до сего времени только ночью и неизвѣстно еще, не имѣетъ-ли на нее неблагопріятное вліяніе дневной солнечный свѣтъ, а также и туманъ, пыль, дымъ и проч. Электрическимъ же системамъ, безъ сомнѣнія, присущъ другой недостатокъ, а именно, тотъ, что передаваемое сообщеніе можетъ быть слышно не только тому лицу, кому оно предназначается, но и многимъ другимъ, т. е. тотъ же недостатокъ, который, несмотря на всѣ старанія, до сихъ поръ не удалось устранить въ безпроволочномъ телеграфѣ.

(„Почтово-Телегр. Ж.“).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Выводъ площади треугольника по тремъ сторонамъ.

Въ одной изъ послѣднихъ тетрадей англійскаго „Nature" проф. *J. D. Everett* предлагаетъ слѣдующій простой выводъ площади треугольника по тремъ сторонамъ.

Пусть O будетъ центръ круга, вписаннаго въ треугольникъ, O′ центръ круга внѣвписаннаго и касающагося стороны BC. Черезъ α и α' обозначимъ точки, въ которыхъ окружности O и O′ касаются стороны BC; черезъ r и r_a обозначимъ радіусы этихъ окружностей. Въ такомъ случаѣ

$$B\alpha = p - b,\quad B\alpha' = p - c,\quad O\alpha = r,\quad O\alpha' = r_a.$$

Изъ подобія треугольниковъ $OB\alpha$ и $O'B\alpha'$ находимъ:

$$\frac{p-c}{r_a} = \frac{r}{p-b}, \text{ откуда } r.r_a = (p-c)(p-b). \quad (1)$$

Площадь треугольника ABC равна rp. Но, съ другой стороны, та же площадь равна

$$\text{пл. } O'AB + \text{пл. } O'AC - \text{пл. } O'BC = r_a(p-a).$$

Поэтому, площадь треугольника равна также

$$\sqrt{rr_a p(p-a)}$$

или, въ виду соотношенія (1),

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

РЕЦЕНЗІИ.

Общая и физическая химія. **Д-ра М. Рудольфи.** Переводъ съ нѣмецкаго Д. М. Марголина.

При изученіи какой-нибудь научной области весьма часто для огромнаго большинства людей является потребностью уяснить себѣ сначала въ общихъ чертахъ, что даетъ данная область знаній, каковы ея задачи, чего въ ней надо искать и до какой степени развитія она достигла въ изученіи и объясненіи того, чѣмъ она занимается. Затѣмъ, когда познана связь, соотношеніе и значеніе отдѣльныхъ явленій, законовъ и обобщеній, является интересъ къ детальному изученію предмета. Въ этомъ смыслѣ, т. е. какъ первая, такъ сказать, рекогносцировочная экспедиція при изученіи физической химіи, книжка Рудольфи мнѣ представляется весьма полезной. Въ ней въ сжатой и общедоступной формѣ изложены всѣ главнѣйшіе факты, законы, а также представленія и

понятія, къ которымъ пришла научная мысль въ той области знанія, которая трактуется въ этой книжкѣ. Еще полезнѣе эта книга для неспеціалистовъ по химіи и физикѣ, напр., для зоологовъ, ботаниковъ, медиковъ, всякаго рода техниковъ и, наконецъ, для всякаго образованнаго человѣка, желающаго ознакомиться безъ большой затраты времени съ основными положеніями физической химіи съ научной цѣлью или для техническихъ примѣненій.

Переводъ сдѣланъ весьма тщательно и со знаніемъ предмета. Видно, что переводчикъ интересовался предметомъ и любитъ его. Въ нѣкоторыхъ мѣстахъ (напр., стр. 7—8) приведены иные примѣры, чѣмъ въ текстѣ, взяты новѣйшія числа для атомныхъ вѣсовъ. Смыслъ текста всегда переданъ точно. Вообще, видно добросовѣстное, сознательное и любовное отношеніе переводчика къ дѣлу. Ошибокъ въ переводѣ я не замѣтилъ, кромѣ нѣсколькихъ неловкихъ выраженій. Напр., на стр. 55-й вмѣсто „сахарный растворъ будетъ съ извѣстной силой устремляться вверхъ etc.“ лучше-бы было сказать: „сахаръ или частицы сахара“.

Проф. С. Танатаръ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 322 (4 сер.). Существуетъ ли система нумераціи, въ которой число 1121 есть точный кубъ?

(Заимств.). Сообщилъ *Д. С.* (Екатеринославъ).

№ 323 (4 сер.) Опредѣлить уголъ между діагоналями прямоугольника, если даны углы α, β и γ, подъ которыми видны три его стороны изъ нѣкоторой точки M, лежащей внутри этого прямоугольника.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 324 (4 сер.). По данному периметру $2p$ прямоугольнаго треугольника опредѣлить его медіану, проведенную изъ вершины прямого угла, зная, что его гипотенуза достигаетъ maximum'а.

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

№ 325 (4 сер.). Доказать, что во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ высота, проведенная къ гипотенузѣ, равна суммѣ радіусовъ круговъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ и въ два треугольника, на которые онъ разбивается высотой.

(Заимств.).

№ 326 (4 сер.). Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи n числа $n^2(n^{20}+274)(n^6+251)$ и $n^2(n^{20}-276)(n^6-253)$ дѣлятся на 138600.

Г. Огановъ (Эривань).

№ 327 (4 сер.). Кубъ, ребро котораго равно 30 сантиметрамъ, погруженъ въ углекислый газъ при температурѣ 10°. Опредѣлить давленіе газа на этотъ кубъ.

Плотность углекислаго газа равна 1,529, а коэффиціентъ расширенія равенъ 0,0036.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 219 (4 сер.). *Въ пневматической машинѣ вмѣстимость цилиндра равна 530 куб. сантим., а давленіе воздуха въ резервуарѣ 763 миллиметра. Послѣ четырехъ поднятій поршня давленіе сдѣлалось равнымъ 176 миллиметрамъ. Опредѣлить вмѣстимость резервуара.*

Назовемъ объемъ резервуара въ кубическихъ сантиметрахъ черезъ x. Пусть резервуаръ наполненъ газомъ, давленіе котораго равно H; этотъ газъ при поднятіи поршня займетъ объемъ $530+x$ кубическихъ сантиметровъ, а потому его давленіе, согласно съ закономъ Бойля-Маріотта, станетъ равно $H\cdot\frac{x}{530+x}$ и останется такимъ при опусканіи поршня. Примѣняя разсужденіе такого рода къ первоначальному давленію воздуха въ резервуарѣ и повторяя его для разрѣженнаго воздуха, находимъ:

$$763\left(\frac{x}{530+x}\right)^4=176,$$

откуда

$$\frac{x}{530+x}=\sqrt[4]{\frac{176}{763}},\quad \frac{530+x}{x}=\frac{530}{x}+1=\sqrt[4]{\frac{763}{176}}=1{,}443,$$

$$\frac{530}{x}=1{,}443-1=0{,}433,\quad x=\frac{530}{0{,}433}=1196 \text{ куб. сантим.}$$

Итакъ, искомый объемъ резервуара равенъ 1196 кубическимъ сантиметрамъ.

Л. Ямпольскій (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань).

№ 254 (4 сер.). *На какомъ разстояніи отъ центра шара радіуса* R *надо провести плоскость, чтобы полная поверхность пирамиды, вершиной которой служитъ центръ шара, а основаніемъ—квадратъ, вписанный въ кругъ, происшедшій отъ пересѣченія шара вышеуказанной плоскостью,—равнялась* $4m^2$.

Пусть O—центръ шара, O'—центръ окружности сѣченія, AB—сторона квадрата, вписаннаго въ эту окружность, C—средина AB. Введя обозначенія $OO'=x$, $AB=y$, $OC=z$, $OA=R$, $O'A=r$, имѣемъ:

$$r=\sqrt{R^2-x^2} \quad (1),$$

$$y=r\sqrt{2}, \text{ или (см. (1)) } y=\sqrt{2(R^2-x^2)} \quad (2),$$

$$z=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{R^2-\frac{y^2}{4}}, \text{ или (см. (2)) } z=\sqrt{\frac{R^2+x^2}{2}} \quad (3).$$

Полная поверхность пирамиды выразится черезъ

$$y^2+\frac{4y.z}{2}=y^2+2yz=4m^2 \quad (4).$$

Подставляя въ уравненіе (4) r, y и z изъ формулъ (1), (2) и (3), получимъ:

$$2R^2-2x^2+2\sqrt{\frac{2(R^2-x^2)(R^2+x^2)}{2}}=4m^2$$

$$R^2-x^2+\sqrt{R^4-x^4}=2m^2 \qquad (5),$$

откуда

$$\sqrt{R^4-x^4}=2m^2-R^2+x^2,\quad R^4-x^4=x^4-2(2m^2-R^2)x^2-4m^2R^2+4m^4+R^4,$$

$$x^4-(R^2-2m^2)x^2-2m^2(R^2-m^2)=0 \qquad (6),$$

$$x=\sqrt{\frac{R^2-2m^2\pm\sqrt{R^4+4m^2R^2-4m^4}}{2}} \qquad (7).$$

Такъ какъ x выражаетъ длину отрѣзка OO', то въ формулѣ (7) передъ радикаломъ подразумѣвается лишь знакъ $+$. Такимъ образомъ, получаемъ два рѣшенія:

$$x_1=\sqrt{\frac{R^2-2m^2+\sqrt{R^4+4m^2R^2-4m^4}}{2}} \qquad (8),$$

$$x_2=\sqrt{\frac{R^2-2m^2-\sqrt{R^4+4m^2R^2-4m^4}}{2}} \qquad (9).$$

Вмѣсто того, чтобы изслѣдовать эти формулы, замѣтимъ, что изъ уравненія (6) вытекаетъ:

$$x_1^2+x_2^2=R^2-2m^2,\quad x_1^2x_2^2=-2m^2(R^2-m^2) \qquad (10).$$

Согласно второй изъ этихъ формулъ, квадратъ одного изъ корней x_1 или x_2 можетъ равняться 0 лишь при $m=0$ или $R=m$ *); въ этихъ случаяхъ (см. (8), (9)) лишь x_1 даетъ соотвѣтственно значенія R и 0, удовлетворяющія уравненію (6), а x_2 не даетъ годныхъ рѣшеній.

Пусть теперь $m\neq 0$.

Если $R<m$, то, даже въ случаѣ дѣйствительности x_1^2 и x_2^2, выраженіе $x_1^2+x_2^2$ отрицательно, а выраженіе $x_1^2x_2^2$ (см. (10)) положительно.

Поэтому оба квадрата x_1^2 и x_2^2 отрицательны или мнимы, а потому формулы (8) и (9) даютъ въ этомъ случаѣ обѣ мнимый отвѣтъ, указывающій на невозможность задачи.

Если же, наконецъ, $R>m$, то (см. (8), (9)) радикалъ $\sqrt{R^4+4m^2R^2-4m^4}$ дѣйствителенъ, а потому и x_1^2 и x_2^2 дѣйствительны; при томъ (см. (10)) x_1^2 и x_2^2 разныхъ знаковъ, а потому x_1^2, какъ бо́льшее изъ этихъ двухъ чиселъ, положительно, а x_2^2—отрицательно.

Въ этомъ случаѣ x_1 даетъ годный, т. е. удовлетворяющій уравненію (6), отвѣтъ.

И. Плотникъ (Одесса); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *Г. Оганов*ъ (Эривань).

№ 260 (4 сер.). *Доказать, что трехчленъ*

$$x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c},$$

гдѣ a, b, c *цѣлыя положительныя числа, дѣлится безъ остатка на* x^2+x+1.

Разлагая на множителей трехчленъ x^2+x+1, находимъ:

$$x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta) \qquad (1),$$

*) Подъ m можно подразумѣвать лишь положительное число, такъ какъ въ условіе задачи входитъ только m^2, а не m.

гдѣ α и β суть корни уравненія

$$x^2+x+1=0 \qquad (2),$$

а именно,

$$\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \beta=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \qquad (3).$$

Удовлетворяя уравненію (2), числа α и β суть также корни уравненія

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1=0.$$

Поэтому

$$\alpha^3=\beta^3=1 \qquad (4).$$

Подставивъ въ выраженіе $x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c}$ вмѣсто $x\alpha$ или β, находимъ (см. (4), (2), (3))

$$\alpha^{3a+2}+\alpha^{3b+1}+\alpha^{3c}=\alpha^2.(\alpha^3)^a+\alpha(\alpha^3)^b+(\alpha^3)^c=\alpha^2+\alpha+1=0 \qquad (5)$$

и подобнымъ же образомъ

$$\beta^{3a+2}+\beta^{3b+1}+\beta^{3c}=0 \qquad (6).$$

Изъ равенства (5), согласно съ теоремой Безу, слѣдуетъ, что трехчленъ $x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c}$ дѣлится безъ остатка на $x-\alpha$, такъ что справедливо *тожество*

$$x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c}=(x-\alpha).\varphi(x) \qquad (7),$$

гдѣ $\varphi(x)$ цѣлый относительно x многочленъ.

Подставляя въ тожество (7) вмѣсто x β, найдемъ (см. (6)):

$$0=(\beta-a).\varphi(\beta),$$

или, такъ какъ (см. (3)) $\beta-\alpha\neq0$,

$$\varphi(\beta)=0,$$

откуда, по теоремѣ Безу, заключаемъ, что $\varphi(x)$ дѣлится на $x-\beta$, такъ что

$$\varphi(x)=(x-\beta)\psi(x) \qquad (8),$$

гдѣ $\psi(x)$ цѣлый относительно x многочленъ.

Такимъ образомъ (см. (7), (8)),

$$x^{3a+1}+x^{3b+1}+x^{3c}=(x-\alpha)(x-\beta)\psi(x),$$

или (см. (1))

$$x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c}=(x^2+x+1).\psi(x),$$

$$\frac{x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c}}{x^2+x+1}=\psi(x),$$

т. е. трехчленъ $x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c}$ дѣлится на трехчленъ x^2+x+1.

Х. Вовси (Двинскъ); *В. Винокуровъ* (Москва); *Г. Огановъ* (Эривань); *Р. Масковъ* (Казань); *И. Плотникъ* (Одесса).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 18-го Апрѣля 1903 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.